■運動方程式と振動解

○無減衰自由振動

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{1}$$

あるいは,

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0\,,\ (\omega_0^2 = k/m) \tag{2}$$

このときの振動解は,

$$x = A\cos(\omega_0 t - \theta)\,,\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{3}$$

となる。ここに A, θ は初期値によって決まる定数であり，初期変位 d_0，初期速度 v_0 としたとき

$$A = \sqrt{d_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}\,,\quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_0}{\omega_0 d_0}\right) \tag{4}$$

となる。

○減衰自由振動

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{5}$$

あるいは,

$$\ddot{x} + 2h\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0\,,\ \left(\omega_0^2 = \frac{k}{m},\quad h = \frac{c}{2\sqrt{mk}}\right) \tag{6}$$

ここに，h は減衰定数（あるいは減衰率）と呼ばれる値であり，通常は 0～1 の間の値となる。(鋼構造や木造で 0.02，鉄筋コンクリート造で 0.05 が用いられることが多い)。このときの振動解は,

$$x = A\exp(-h\omega_0 t)\cos(\omega_d t - \theta) \tag{7}$$

となる。ここに,

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1-h^2} \tag{8}$$

であり，また A, θ は初期値によって決まる定数であり，初期変位 d_0，初期速度 v_0 としたとき

$$A = \sqrt{d_0^2 + \left(\frac{v_0 + h\omega_0 d_0}{\omega_d}\right)^2}\,,\quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_0 + h\omega_0 d_0}{\omega_d d_0}\right) \tag{9}$$

で求められる。

○減衰定数の算出

減衰自由振動をしているとき，1 周期前の振幅の 1 周期後の振幅に対する比を d とすると，(7)式より

$$d = \frac{x(t)}{x(t+T_d)} = \frac{\exp(-h\omega_0 t)}{\exp(-h\omega_0(t+T_d))} = \exp(h\omega_0 T_d) = \exp\left(\frac{2\pi h}{\sqrt{1-h^2}}\right)$$

となる。両辺の対数をとると,

$$\ln d = \frac{2\pi h}{\sqrt{1-h^2}}$$

となる。h が充分に小さいとすると，分母は 1 と考えられるので,

$$h = \frac{\ln d}{2\pi} \tag{10}$$

で減衰定数 h が求められることになる。

○調和外力下での振動

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F\cos\omega t \tag{11}$$

$$\ddot{x} + 2h\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}\cos\omega t\text{ ,（}\omega_0^2 = \frac{k}{m},\ \ h = \frac{c}{2\sqrt{mk}}\text{）} \tag{12}$$

充分に時間が経った後の変位応答を

$$x = A\cos(\omega t - \phi) \tag{13}$$

とすると，

$$A = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + 4h^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\frac{F}{k} \tag{14}$$

が求められる。この充分に時間が経って，応答が一定になった状態を，定常状態と呼ぶ。ここに，右辺の F/k は力 F を静的にかけたときに生じる変位であり，この変位を δ_s とすると，

$$\frac{A}{\delta_s} = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\}^2 + 4h^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \tag{15}$$

となる。ここに，縦軸を A/δ_s，横軸を振動数比 ω/ω_0 として描いた図を共振曲線と呼ぶ。また，$\omega/\omega_0 = 1$ のとき（外力と建物の固有振動数が一致するとき）最も値が大きくなるが，そのときを共振と呼び，振幅値は，

$$A = \frac{1}{2h}\delta_s$$

で求められる。

○地震応答

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = -m\ddot{y}(t) \tag{16}$$

あるいは，

$$\ddot{x} + 2h\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = -\ddot{y}(t)\ \text{（}\omega_0^2 = \frac{k}{m},\ \ h = \frac{c}{2\sqrt{mk}}\text{）} \tag{17}$$

ここに，$\ddot{y}(t)$ は時間によって変化する地動加速度を表しており，(17)式をみて分かるとおり，応答は建物の減衰定数と固有円振動数および地動加速度で求められる。

(16)式を直接数値的に解く方法は多々提案されているが，建築では Newmark β法という方法が用いられることが多い。この Newmark β法を用いれば，自由振動や調和外力下での振動も数値解析できる（外力がずっと 0 か正弦波になるだけな）ので，上記の解析解と Newmark β法による数値解が一致するか確かめてみる。

■建物の応答を表す様々な図

〇時刻歴応答図とスペクトル図
・時刻歴応答図：横軸は時刻，縦軸は（変位，速度，加速度）応答。
・スペクトル図：横軸は振動数，縦軸は時刻歴応答の（絶対値の）最大値

〇自由振動の時刻歴応答図
・初期変位や初期速度を与えて建物がどのように振動するか見る。
（確認内容）
・数値解と解析解(7)が一致するか？
・減衰定数の大きさで，応答はどのように変化するか？
・(10)式を用いて，応答変位から減衰定数が算出できるか？

〇調和外力下での時刻歴応答図
・初期変位と初期速度を 0 にして，入力外力として正弦波を入れる。
（確認内容）
・数値解析で，時間が経つと振幅値が一定となる定常応答になるか？
・定常応答の振動数は外力の振動数と一致するか？
・この振幅値は，解析解(14)と一致するか？

〇共振曲線
・上記[調和外力下での時刻歴]で求められる振幅値を外力の振動数を変化させながら描いた図(15)
・横軸は調和外力の振動数を建物の振動数で割った値（振動数比と呼ぶ）。
・縦軸は定常状態の振幅値（変位）を，外力の振幅値を静的にかけたときの変位で割った値。

〇地震時の時刻歴応答図
・初期変位と初期速度を 0 にして，入力外力として地震動を入れる。
（確認内容）
・建物の固有振動数くらいで応答しているか？
・減衰が大きくなると応答は小さくなるか？

〇地震応答スペクトル図
・上記[地震時の時刻歴]で求められる応答の最大値を建物の固有振動数毎に求めた図
・横軸は建物の固有振動数。縦軸は時刻歴応答（変位や加速度）の最大値。
・地震動，減衰定数により異なる図が得られる。
（確認内容）
・固有周期が長くなると，地震応答加速度は小さくなる？
・固有周期が長くなると，地震応答変位は大きくなる？
・減衰が大きくなると応答は小さくなり，曲線も滑らかになる？